I Développements d'algèbre

Formes de Hankel [3]

I.A Formes de Hankel

Théorème 1:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Notons $x_1, \dots, x_t$ ses racines distinctes et $m_1, \dots, m_t$ leur multiplicité. Soit $s_k = \sum_{i=1}^t m_i x_i^k$ les sommes de Newton associées. Alors

$$\sigma = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} s_{i+j} X_i X_j$$

définit une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$. Elle définit également une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. On notant (p, q) sa signature, alors le nombre de racines réelles distinctes de P est $p - q$.

Démonstration. Comme σ est un polynôme homogène de degré 2 sur $\mathbb{C}$, on a que σ définit une forme quadratique sur $\mathbb{C}$.

C'est de plus une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ car $s_k \in \mathbb{R}$.
En effet, pour toute racine x de P on a l'un des deux cas exclusifs suivants :

1. $x \in \mathbb{R}$;
2. sinon comme P est à coefficients réels, x et $\overline{x}$ sont toutes les deux racines de P. Alors $x^k + \overline{x}^k = 2\Re(x^k) \in \mathbb{R}$.

On pose φ_k la forme linéaire $\varphi_k = \sum_{i=1}^n x^{i-1} e_i^*$. Donc dans la base duale de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_t \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{t-1} & \dots & x_t^{t-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_t^{n-1} \end{pmatrix}$$

Or on reconnaît dans cette matrice une matrice de Vandermonde de taille t. Elle est inversible car les racines sont deux à deux distinctes.
Donc cette matrice est de rang t (dans $\mathbb{C}$).

On définit la forme quadratique $\rho = \sum_{i=k}^t m_k \varphi_k^2$. Cette forme quadratique coïncide avec σ car le terme en $X_i X_j$ de ρ est :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^t 2 m_k x_k^{i+j} = 2 s_{i+j} & \text{si } i \neq j \\ \sum_{k=1}^t m_k x_k^{i+j} = s_{i+j} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ce qui correspond aux coefficients dans σ. Or par définition de la signature, le rang de σ est $p + q$. Mais le rang est invariant par extension de corps donc $p + q = t$.

Il reste donc à régler la question de savoir comment les φ_k interagissent avec la signe en fonction de x_k.
On a toujours les deux cas exclusifs précédents :

1. $x_k \in \mathbb{R}$, alors φ_k^2 est une forme quadratique réelle de signature $(1,0)$ car φ_k est une forme linéaire non nulle ;
2. sinon, on a que $\overline{\varphi_k}$ correspond à la forme associée à $\overline{x_k}$, et alors $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\Re(\varphi_k)^2 - 2\Im(\varphi_k)^2$ est une forme quadratique réelle et comme $x_k \neq \overline{x_k}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_k & \overline{x_k} \\ \vdots & \vdots \\ x_k^{n-1} & \overline{x_k}^{n-1} \end{pmatrix}$$

   est de rang 2 pour les mêmes raisons que précédemment. Donc les formes linéaires φ_k et $\overline{\varphi_k}$ sont linéairement indépendantes ; donc la forme quadratique réelle $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\Re(\varphi_k)^2 - 2\Im(\varphi_k)^2$ est de signature $(1,1)$.

Au total, les racines réelles jouent toutes pour $(1,0)$ dans la signature est les couples de racines complexes conjuguées jouent chacun pour $(1,1)$ dans la signature.

Finalement en notant r le nombre de racines réelles, on a :

$$(p,q) = (r,0) + \left(\frac{t-r}{2}\frac{t-r}{2}\right).$$

On en déduit ainsi $r = p - q$. ■